



কৃতিত্ব — প্রশ্ন সংকলন

Mathematics — অধ্যায় ৩: বীজগাণিতিক রাশি

MCQ + SQ (উত্তরসহ) + CQ (সমাধানসহ)

বিষয়

Mathematics

অধ্যায়

অধ্যায় ৩: বীজগাণিতিক রাশি

প্রশ্নের ধরন

MCQ + SQ (উত্তরসহ) + CQ (সমাধানসহ)

মোট প্রশ্ন

৫৫

১. $x + y = 4$ এবং $xy = 1$ ২২। $x - y$ এর মান কত?(ক) $2\sqrt{3}$ ✓(খ) $\sqrt{14}$ (গ) $3\sqrt{2}$ (ঘ) $2\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে,

$$x + y = 4$$

$$\text{এবং } xy = 1$$

$$\therefore (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

$$= (4)^2 - 4 \times 1$$

$$= 16 - 4 = 12$$

$$\therefore x - y = 2\sqrt{3}$$

৪. $a^2 - 4a - 1 = 0$ ২৫। $a + \frac{1}{a}$ এর মান কত? [যখন $a > 0$](ক) $2\sqrt{3}$ (খ) $\sqrt{14}$ (গ) $3\sqrt{2}$ (ঘ) $2\sqrt{5}$ ✓

ব্যাখ্যা: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$
 $= 4^2 + 4 = 20$
 $\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

২. $x + y = 4$ এবং $xy = 1$ ২৩। $x^3 + y^3$ এর মান কত?

(ক) 0

(খ) 24

(গ) 52 ✓

(ঘ) 76

ব্যাখ্যা: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$
 $= (4)^3 - 3 \times 1 \times 4$
 $= 64 - 12 = 52$

৩. $a^2 - 4a - 1 = 0$ ২৪। $a^2 + \frac{1}{a^2}$ এর মান কত?

(ক) 12

(খ) 14

(গ) 18 ✓

(ঘ) 20

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে,

$$a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$\text{বা, } a^2 - 1 = 4a$$

$$\text{বা, } a - \frac{1}{a} = 4$$

এখন, $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$
 $= (4)^2 + 2 = 18$

৫. $y = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ২৬। $\frac{1}{y}$ এর মান কত?(ক) $2(\sqrt{6} - \sqrt{5})$ (খ) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ ✓(গ) $2\sqrt{6} + 3\sqrt{5}$ (ঘ) $2\sqrt{6} - 3\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5}$
 $= \sqrt{6} - \sqrt{5}$

৬. $y = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ২৭। y^2 এর মান কত?(ক) $11 + \sqrt{30}$ (খ) $11 - \sqrt{30}$ (গ) $11 + 2\sqrt{30}$ ✓(ঘ) $11 - 2\sqrt{30}$

ব্যাখ্যা: $y^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$
 $= (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
 $= 6 + 2\sqrt{30} + 5$
 $= 11 + 2\sqrt{30}$

৭. $p + q = 7$ এবং $pq = 10$ হলে, $p^3 + q^3 =$ কত?

(ক) 117

(খ) 133 ✓

(গ) 313

(ঘ) 373

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে $p + q = 7$

$pq = 10$

$\therefore p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3pq(p + q)$

$= (7)^3 - 3 \times 10 \times 7$

$= 343 - 210$

$= 133$

১০. $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

(ক) $22\sqrt{2}$

(খ) $16\sqrt{2}$

(গ) $14\sqrt{2}$

(ঘ) $10\sqrt{2}$ ✓

ব্যাখ্যা: $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= (2\sqrt{2})^3 - 3 \times 2\sqrt{2}$

$= 16\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{2}$

৮. $x + y = \sqrt{10}$ এবং $x - y = \sqrt{6}$ হলে, xy এর মান নিচের কোনটি?

(ক) 16

(খ) 18

(গ) 4

(ঘ) 2 ✓

ব্যাখ্যা: $xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{2}$

$= \frac{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{6})^2}{2} = \frac{10 - 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$

১১. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ হলে, $x + \frac{1}{x} =$ কত?

(ক) 4

(খ) $\sqrt{14}$

(গ) $2\sqrt{3}$

(ঘ) $2\sqrt{5}$ ✓

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 18$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 18 + 2$

বা, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5 \times 4}$

বা, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{20}$

$\therefore x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$

৯. $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

(ক) 4

(খ) 6 ✓

(গ) 8

(ঘ) 10

ব্যাখ্যা: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$

$= (2\sqrt{2})^2 - 2 = 8 - 2 = 6$

১২. $a^2 + \frac{1}{a^2} = 27$ হলে, $a + \frac{1}{a}$ এর মান কত?

(ক) $\sqrt{29}$ ✓

(খ) $\sqrt{27}$

(গ) $\sqrt{23}$

(ঘ) $\sqrt{21}$

ব্যাখ্যা: $a^2 + \frac{1}{a^2} = 27$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 27$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 27 + 2$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 29$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{29}$

খ. সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

৩৪ টি প্রশ্ন

১. $p + q = 5$, $p - q = 3$ হলে, $p^2 + q^2$ এর মান কত?

উত্তর: দেওয়া আছে $p + q = 5$

$p - q = 3$

$$\therefore p^2 + q^2 = \frac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}$$

$$= \frac{(5)^2 + (3)^2}{2}$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 17$$

২. দেখাও যে, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

উত্তর: সমাধান: আমরা জানি,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{এবং } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \dots\dots\dots(ii)$$

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\text{বা, } (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$\text{বা, } 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$

$$\text{বা, } ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$\therefore ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \text{ (দেখানো হলো)}$$

৩. $y - \frac{2}{y} = 2a$ হলে, $\frac{6a}{y^2 - 2ay - 1}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: সমাধান: এখানে, $y - \frac{2}{y} = 2a$

$$\text{বা, } \frac{y^2 - 2}{y} = 2a$$

$$\text{বা, } y^2 - 2 = 2ay$$

$$\therefore y^2 - 2ay = 2$$

$$\therefore \frac{6a}{y^2 - 2ay - 1} = \frac{6a}{2 - 1} = \frac{6a}{1} = 6a.$$

নির্ণেয় মান $6a$ ।

৪. $x^2 + y^2 = 4xy$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 14$.

উত্তর: সমাধান: এখানে, $x^2 + y^2 = 4xy$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)^2 - 2$$

$$= \left(\frac{4xy}{xy}\right)^2 - 2 \quad [\because x^2 + y^2 = 4xy]$$

$$= 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 14. \text{ (প্রমাণিত)}$$

৫. $x^2 - 2\sqrt{6} - 5 = 0$ হলে, x এর মান কত?

উত্তর: সমাধান: এখানে, $x^2 - 2\sqrt{6} - 5 = 0$

$$\text{বা, } x^2 = 5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\text{বা, } x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান: } \sqrt{3} + \sqrt{2}।$$

৬. $m + \frac{1}{m} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $m^3 + \frac{1}{m^3}$ এর মান কত?

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $m + \frac{1}{m} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= m^3 + \frac{1}{m^3} \\ &= \left(m + \frac{1}{m}\right)^3 - 3m\left(\frac{1}{m}\right)\left(m + \frac{1}{m}\right) \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{6})^3 + 3(\sqrt{6})^2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{6} + 18\sqrt{5} + 15\sqrt{6} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} \\ &= 18\sqrt{6} + 20\sqrt{5} \\ \text{নির্ণেয় মান: } &18\sqrt{6} + 20\sqrt{5}। \end{aligned}$$

৭. যদি $x(2x - 5) = \frac{1}{3}$ হয় তবে, প্রমাণ কর যে, $8x^3 - \frac{1}{27x^3} = 135$.

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $x(2x - 5) = \frac{1}{3}$

$$\text{বা, } 2x - 5 = \frac{1}{3x}$$

$$\text{বা, } 2x - \frac{1}{3x} = 5$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= 8x^3 - \frac{1}{27x^3} = (2x)^3 - \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \\ &= \left(2x - \frac{1}{3x}\right)^3 + 3 \cdot 2x \cdot \frac{1}{3x} \left(2x - \frac{1}{3x}\right) \\ &= 5^3 + 2.5 = 125 + 10 = 135 = \text{ডানপক্ষ} \\ \therefore 8x^3 - \frac{1}{27x^3} &= 135. (\text{প্রমাণিত}) \end{aligned}$$

৮. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^4 - 51a^2 + 1$.

উত্তর: সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= a^4 - 51a^2 + 1$

$$\begin{aligned} &= a^4 - 2a^2 + 1 - 51a^2 + 2a^2 \\ &= (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 - 49a^2 \\ &= (a^2 - 1)^2 - (7a)^2 \\ &= (a^2 - 1 + 7a)(a^2 - 1 - 7a) \\ &= (a^2 + 7a - 1)(a^2 - 7a - 1) \\ \text{নির্ণেয় উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ: } &(a^2 + 7a - 1)(a^2 - 7a - 1)। \end{aligned}$$

৯. দেখাও যে, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

উত্তর: সমাধান: আমরা জানি,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots(i)$$

১০. $f(x) = 6x^3 - 13x^2 + 23x - 9$ হলে দেখাও যে, $(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উত্তর: সমাধান: $(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ হবে।}$$

এখন,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 13 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 23 \times \frac{1}{2} - 9$$

$$= 6 \times \frac{1}{8} - 13 \times \frac{1}{4} + \frac{23}{2} - 9$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} + \frac{23}{2} - 9$$

$$= \frac{3-13+46-36}{4}$$

$$= \frac{49-49}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$\therefore (2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

১১. $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ ।

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 4$ ।

$$\text{বামপক্ষ} = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left\{ \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \right\}^2 - 2$$

$$= \{(4)^2 + 2\}^2 - 2 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= (16 + 2)^2 - 2 = (18)^2 - 2$$

$$= 324 - 2 = 322 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = 322 \text{। (প্রমাণিত)}$$

১২. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

$$\text{এবং } ab + bc + ca = 8$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (a + b + c)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$$

$$= 9 + 2 \times 8 = 9 + 16 = 25$$

নির্ণেয় মান 25।

১৩. দেখাও যে, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ ।

উত্তর: সমাধান: আমরা জানি,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{(i)}$$

$$\text{এবং } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{(ii)}$$

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\text{বা, } (a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$\text{বা, } 4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$\text{বা, } ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$\therefore ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{। (দেখানো হলো)}$$

১৪. $y - \frac{2}{y} = 2a$ হলে, $\frac{6a}{y^2 - 2ay - 1}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: সমাধান: এখানে, $y - \frac{2}{y} = 2a$

$$\text{বা, } \frac{y^2 - 2}{y} = 2a$$

$$\text{বা, } y^2 - 2 = 2ay$$

$$\therefore y^2 - 2ay = 2$$

$$\therefore \frac{6a}{y^2 - 2ay - 1} = \frac{6a}{2 - 1} = \frac{6a}{1} = 6a$$

নির্ণেয় মান $6a$ ।

১৫. $x + y = 30$ এবং $x - y = 20$ হলে, $\sqrt{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: সমাধান: এখানে, $x + y = 30$ (i)

এবং $x - y = 20$ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$x + y + x - y = 30 + 20$$

$$\text{বা, } 2x = 50$$

$$\text{বা, } x = \frac{50}{2} = 25$$

$$\text{বা, } \sqrt{x} = \sqrt{25} \text{ (বর্গমূল করে)}$$

$$\therefore \sqrt{x} = 5।$$

১৬. $(x^2 + 1)^2 = 5x^2$ হলে, $x + \frac{1}{x} =$ কত?

উত্তর: সমাধান: এখানে, $(x^2 + 1)^2 = 5x^2$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = \sqrt{5x^2} = \sqrt{5}x$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\sqrt{5}x}{x}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}।$$

১৭. $x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0$ হলে, দেখাও যে, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}$.

উত্তর: দেওয়া আছে, $x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = \sqrt{6}x$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\sqrt{6}x}{x}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4x \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= (\sqrt{6})^2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}. \text{ (প্রমাণিত)}$$

১৮. $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{3}$ হলে, ab এর মান কত?

উত্তর: দেওয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$

এবং $a - b = \sqrt{3}$

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ [মান বিসেয়]}$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

নির্ণেয় মান 1.

১৯. যদি $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$ হয়, তবে ab এর মান কত?

উত্তর: দেওয়া আছে, $a^3 - b^3 = 513$

এবং $a - b = 3$

আমরা জানি,

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$\text{বা, } (3)^3 = 513 - 3ab \cdot 3 \text{ [মান বিসেয়]}$$

$$\text{বা, } 27 = 513 - 9ab$$

$$\text{বা, } 9ab = 513 - 27$$

$$\text{বা, } ab = \frac{486}{9} = 54$$

নির্ণেয় মান 54.

২০. যদি $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$

$$\text{বামপক্ষ} = m^3 + 2p^3$$

$$= (a + b)^3 + 2(a^3 + b^3)$$

$$[\because a + b = m \text{ এবং } a^3 + b^3 = p^3]$$

$$= (a + b)(a + b)^2 + 2(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= (a + b)\{(a + b)^2 + 2(a^2 - ab + b^2)\}$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2 - 2ab + 2b^2)$$

$$= (a + b)(3a^2 + 3b^2)$$

$$= 3(a + b)(a^2 + b^2) = 3mn = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore m^3 + 2p^3 = 3mn. \text{ (দেখানো হলো)}$$

২১. $p^2 - 1 = \sqrt{5}p$ হলে, $p^3 - \frac{1}{p^3}$ এর মান কত?

উত্তর: সমাধান: এখানে, $p^2 - 1 = \sqrt{5}p$

$$\text{বা, } p \left(p - \frac{1}{p} \right) = \sqrt{5}p$$

$$\text{বা, } p - \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{5}p}{p}$$

$$\text{বা, } p - \frac{1}{p} = \sqrt{5}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = p^3 - \frac{1}{p^3}$$

$$= \left(p - \frac{1}{p} \right)^3 + 3 \cdot p \cdot \frac{1}{p} \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

$$= (\sqrt{5})^3 + 3 \times \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

নির্ণেয় মান $8\sqrt{5}$.

২২. যদি $x(2x - 5) = \frac{1}{3}$ হয় তবে, প্রমাণ কর যে, $8x^3 - \frac{1}{27x^3} = 135$.

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $x(2x - 5) = \frac{1}{3}$

$$\text{বা, } 2x - 5 = \frac{1}{3x}$$

$$\text{বা, } 2x - \frac{1}{3x} = 5$$

$$\text{বামপক্ষ} = 8x^3 - \frac{1}{27x^3} = (2x)^3 - \left(\frac{1}{3x} \right)^3$$

$$= \left(2x - \frac{1}{3x} \right)^3 + 3 \cdot 2x \cdot \left(\frac{1}{3x} \right) \left(2x - \frac{1}{3x} \right)$$

$$= 5^3 + 2.5 = 125 + 10$$

$$= 135 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore 8x^3 - \frac{1}{27x^3} = 135. (\text{প্রমাণিত})$$

২৩. $a + b = \sqrt{2}$ এবং $a^2 - ab + b^2 = \sqrt{8}$ হলে, $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, $a + b = \sqrt{2}$ এবং $a^2 - ab + b^2 = \sqrt{8}$

$$\text{আমরা জানি, } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

নির্ণেয় মান 4।

২৪. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে $\left(\frac{a}{b} \right)^3 + \left(\frac{b}{a} \right)^3 = 2$ ।

উত্তর: দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{a}{b} \right)^3 + \left(\frac{b}{a} \right)^3$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b} \right)^3 + \left(\frac{b}{a} \right)^3 = 2. (\text{প্রমাণিত})$$

২৫. $b^2 - 1 + 2c - c^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উত্তর: প্রদত্ত রাশি $= b^2 - 1 + 2c - c^2$
 $= b^2 - (c^2 - 2c + 1) = b^2 - (c - 1)^2$
 $= \{b + (c - 1)\}\{b - (c - 1)\}$
 $= (b + c - 1)(b - c + 1)$
নির্ণেয় উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ: $(b + c - 1)(b - c + 1)$ ।

২৬. $x^2 + 10x + 16 - y^2 + 6y$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উত্তর: প্রদত্ত রাশি
 $= x^2 + 10x + 16 - y^2 + 6y$
 $= x^2 + 10x + 25 - y^2 + 6y - 9$
 $= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) - (y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2)$
 $= (x + 5)^2 - (y - 3)^2$
 $= (x + 5 + y - 3)(x + 5 - y + 3)$
 $= (x + y + 2)(x - y + 8)$

২৭. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^4 - 51a^2 + 1$.

উত্তর: $(a^2 + \sqrt{53}a + 1)(a^2 - \sqrt{53}a + 1)$.

২৮. দেখাও যে, $ax + b$, $a \neq 0$ হলে, রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়।

উত্তর: $a \neq 0$, $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $\left(x + \frac{b}{a}\right) = x - \left(-\frac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়। অর্থাৎ, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়। (দেখানো হলো)

২৯. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $4a^3 + 3a^2 - 9a + 2$

উত্তর: $4a^3 + 3a^2 - 9a + 2$
 $= 4a^3 + 8a^2 - 5a^2 - 10a + a + 2$
 $= 4a^2(a + 2) - 5a(a + 2) + 1(a + 2)$
 $= (a + 2)(4a^2 - 5a + 1)$
 $= (a + 2)(4a^2 - 4a - a + 1)$
 $= (a + 2)\{4a(a - 1) - 1(a - 1)\}$
 $= (a + 2)(a - 1)(4a - 1)$

৩০. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^3 - a^2 - 10a - 8$

উত্তর: প্রদত্ত রাশি $= a^3 - a^2 - 10a - 8$

মনে করি, $f(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

এখানে, $f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 10(-2) - 8$

$$= -8 - 4 + 20 - 8$$

$$= -20 + 20 = 0$$

$\therefore (a + 2), f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$$= a^3 + 2a^2 - 3a^2 - 6a - 4a - 8$$

$$= a^2(a + 2) - 3a(a + 2) - 4(a + 2)$$

$$= (a + 2)(a^2 - 3a - 4)$$

$$= (a + 2)(a^2 + a - 4a - 4)$$

$$= (a + 2)\{a(a + 1) - 4(a + 1)\}$$

$$= (a + 2)(a + 1)(a - 4)$$

৩১. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^4 - 51a^2 + 1$

উত্তর: প্রদত্ত রাশি $= a^4 - 51a^2 + 1$

$$= a^4 + 2a^2 + 1 - 53a^2$$

$$= (a^2 + 1)^2 - 53a^2$$

$$= (a^2 + 1 + \sqrt{53}a)(a^2 + 1 - \sqrt{53}a)$$

নির্ণেয় উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ: $(a^2 + 1 + \sqrt{53}a)(a^2 + 1 - \sqrt{53}a)$

৩২. বার্ষিক 12% হার মুনাফায় 1200 টাকার মুনাফা কত বছরে 1728 টাকা হবে?

উত্তর: এখানে, $P = 1200$ টাকা, $r = 12\% = \frac{12}{100}$

$$I = 1728 \text{ টাকা, } n = ?$$

$$\text{আমরা জানি, } I = Pnr$$

$$\text{বা, } n = \frac{I}{Pr} = \frac{1728}{1200 \times \frac{12}{100}} = \frac{172}{144} = 12$$

নির্ণেয় সময় 12 বছর।

৩৩. 3% হার মুনাফায় 10,000 টাকা 3 বছরের জন্য বিনিয়োগ করা হলে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত টাকা?

উত্তর: এখানে,

$$\text{মুনাফার হার, } r = 3\%$$

$$\text{আসল, } P = 10000 \text{ টাকা}$$

$$\text{সময়, } n = 3 \text{ বছর, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = ?$$

আমরা জানি,

$$\text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = C - P = P(1 + r)^n - P$$

$$= 10000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 - 10000$$

$$= 10000(1.03)^3 - 10000$$

$$= 10000(1.092727) - 10000$$

$$= 10927.27 - 10000$$

$$= 927.27 \text{ টাকা।}$$

৩৪. ৫% হার মুনাফায় ৪০০০ টাকার ৩ বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে,

$$P = 8000, r = \frac{5}{100}, n = 3 \text{ বছর}, I = ?$$

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

আমরা জানি,

$$I = Pnr = 8000 \times \frac{5}{100} \times 3 = 1200 \text{ টাকা}$$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$\text{দেওয়া আছে, } P = 8000, r = \frac{5}{100}, n = 3, C = ?$$

আমরা জানি, $C = P(1 + r)^n$

$$= 8000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 8000 \left(1 + \frac{1}{20}\right)^3$$

$$= 8000 \times \left(\frac{21}{20}\right)^3 = 8000 \times \frac{9261}{8000} = 9261 \text{ টাকা}$$

চক্রবৃদ্ধি মূলধন = ৯২৬১ টাকা

$$\text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = (9261 - 8000) \text{ টাকা} = 1261 \text{ টাকা}$$

∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার পার্থক্য

$$= (1261 - 1200) \text{ টাকা} = 61 \text{ টাকা}$$

১ $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}, p = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$

(ক) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $16a^2 + \frac{1}{16a^2} - 2 + 16a - \frac{1}{a}.$

উত্তর: প্রদত্ত রাশি $= 16a^2 + \frac{1}{16a^2} - 2 + 16a - \frac{1}{a}$
 $= (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot \frac{1}{4a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 + 4\left(4a - \frac{1}{4a}\right)$
 $= \left(4a - \frac{1}{4a}\right)^2 + 4\left(4a - \frac{1}{4a}\right)$
 $= \left(4a - \frac{1}{4a}\right)\left(4a - \frac{1}{4a} + 4\right)$

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{x^6 - 1}{x^3} - \sqrt{2} \frac{x^4 + 1}{x^2} = 12\sqrt{2}.$

উত্তর: দেওয়া আছে, $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
 বা, $x^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
 বা, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (বর্গমূল করে)
 বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 এখন, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$
 এবং $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
 বামপক্ষ $= \frac{x^6 - 1}{x^3} - \sqrt{2} \frac{x^4 + 1}{x^2}$
 $= x^3 - \frac{1}{x^3} - \sqrt{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$
 $= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) - \sqrt{2} \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\}$
 $= (2\sqrt{2})^3 + 3(2\sqrt{2}) - \sqrt{2}\{(2\sqrt{3})^2 - 2\}$
 $= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}(12 - 2)$
 $= 22\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = \text{ডানপক্ষ}$
 $\therefore \frac{x^6 - 1}{x^3} - \sqrt{2} \frac{x^4 + 1}{x^2} = 12\sqrt{2}. \text{ (প্রমাণিত)}$

(গ) $p^3 - \frac{8}{p^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, $p = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
 বা, $\frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$
 $\therefore \frac{2}{p} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
 প্রদত্ত রাশি $= p^3 - \frac{8}{p^3} = p^3 - \left(\frac{2}{p}\right)^3$

$$\begin{aligned}
&= \left(p - \frac{2}{p}\right)^3 + 3 \cdot p \cdot \frac{2}{p} \left(p - \frac{2}{p}\right) \\
&= \{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3})\}^3 + 6(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3}) \\
&= (-2\sqrt{3})^3 + 6(-2\sqrt{3}) \\
&= -24\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -36\sqrt{3} \\
&\text{নির্ণেয় মান: } -36\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

২ $p^2 - 2\sqrt{56} - 15 = 0$, $(x + y)^2 = 3$ এবং $(x - y)^2 = 2$

(ক) p^{-2} এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, $p^2 - 2\sqrt{56} - 15 = 0$

বা, $p^2 = 15 + 2\sqrt{56}$

বা, $1/p^2 = 1/(15 + 2\sqrt{56})$ [বাস্তকরণ করে]

বা, $p^{-2} = (15 - 2\sqrt{56})/((15 + 2\sqrt{56})(15 - 2\sqrt{56}))$

বা, $p^{-2} = (15 - 2\sqrt{56})/(225 - 224)$

$\therefore p^{-2} = 15 - 2\sqrt{56} = 15 - 4\sqrt{14}$

নির্ণেয় মান: $p^{-2} = 15 - 4\sqrt{14}$.

(খ) $p^3 + p^{-3}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, $p^2 - 2\sqrt{56} - 15 = 0$

বা, $p^2 = 15 + 2\sqrt{56}$

'ক' হতে পাই, $p^{-2} = 15 - 2\sqrt{56}$

বা, $1/p^2 = 15 - 2\sqrt{56}$

এখন, $p^2 + 1/p^2 = 15 + 2\sqrt{56} + 15 - 2\sqrt{56} = 30$

বা, $(p + 1/p)^2 - 2 \cdot p \cdot (1/p) = 30$

বা, $(p + 1/p)^2 = 30 + 2 = 32$

বা, $p + 1/p = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

প্রদত্ত রাশি $= p^3 + p^{-3} = p^3 + 1/p^3$

$= (p + 1/p)^3 - 3 \cdot p \cdot (1/p) \cdot (p + 1/p)$

$= (4\sqrt{2})^3 - 3(4\sqrt{2})$

$= 128\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 116\sqrt{2}$

নির্ণেয় মান: $116\sqrt{2}$

(গ) প্রমাণ কর যে, $5xy(x^2 + y^2) = 25/8$.

উত্তর: দেওয়া আছে, $(x + y)^2 = 3$

বা, $x + y = \sqrt{3}$ [বর্গমূল করে] (i)

এবং $(x - y)^2 = 2$

বা, $x - y = \sqrt{2}$ [বর্গমূল করে] (ii)

বামপক্ষ $= 5xy(x^2 + y^2)$

$= 5/8 \times 4xy \times 2(x^2 + y^2)$

$= 5/8 \times \{(x + y)^2 - (x - y)^2\} \{(x + y)^2 + (x - y)^2\}$

$= 5/8 \times \{3 - 2\} \{3 + 2\}$ [(i) ও (ii) হতে মান বসিয়ে]

$= 5/8 \times 1 \times 5 = 25/8 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore 5xy(x^2 + y^2) = 25/8$ (প্রমাণিত)

৩ $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1-x)}$ এবং $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

(ক) $7\sqrt{7}$ এর 7 ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর।

২

উত্তর: $7\sqrt{7}$ এর 7 ভিত্তিক লগ $= \log_7(7\sqrt{7})$
 $= \log_7(7^1 \times 7^{\frac{1}{2}})$
 $= \log_7(7^{\frac{3}{2}})$
 $= \frac{3}{2} \times \log_7 7 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

(খ) দেখাও যে, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1-x)$

৪

উত্তর: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1-x)}$
 $\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}{\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$
 $= \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + 1}{\frac{x-1}{x^2}}$
 $= \frac{\frac{1-3x+x^3}{x^3}}{\frac{x-1}{x^2}} \times \frac{x^2}{x-1}$
 $= \frac{x^3 - 3x + 1}{x(x-1)}$
 আবার, $f(1-x) = \frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 1}{(1-x)(1-(1-x))}$
 $= \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3(1 - 2x + x^2) + 1}{x(1-x)}$
 $= \frac{-x^3 + 3x - 1}{x(1-x)}$
 $= \frac{-(x^3 - 3x + 1)}{-(x(x-1))}$
 $= \frac{x^3 - 3x + 1}{x(x-1)}$
 $\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1-x)$. (দেখানো হলো)

(গ) প্রমাণ কর যে, $a^3 + \frac{8}{a^3} = 28\sqrt{5}$

৪

উত্তর: দেওয়া আছে, $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
 বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
 বা, $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$
 $\therefore \frac{2}{a} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
 $\therefore a + \frac{2}{a} = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= a^3 + \frac{8}{a^3} = a^3 + \left(\frac{2}{a}\right)^3 \\ &= \left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{2}{a} \left(a + \frac{2}{a}\right) \\ &= (2\sqrt{5})^3 - 6(2\sqrt{5}) \\ &= 40\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 28\sqrt{5} = \text{ডানপক্ষ} \\ \therefore a^3 + \frac{8}{a^3} &= 28\sqrt{5}. (\text{প্রমাণিত})\end{aligned}$$

8 (i) $x^4 - 38x^2 + 1 = 0$ [যখন $x > 0$] (ii) $a^2 = 17 + 12\sqrt{2}$ [যখন $a > 0$]

(ক) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $4P^2 - 1 + 2R - R^2$.

উত্তর: প্রদত্ত রাশি $= 4P^2 - 1 + 2R - R^2$
 $= 4P^2 - (R^2 - 2R + 1)$
 $= (2P)^2 - (R - 1)^2$
 $= (2P + R - 1)(2P - R + 1)$

(খ) (i) এর সাহায্যে $(x^8 - 1)/x^4$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: (i) নং হতে পাই, $x^4 - 38x^2 + 1 = 0$
 বা, $x^4 + 1 = 38x^2$
 বা, $(x^4 + 1)/x^2 = 38x^2/x^2$ (উভয়পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ করে)
 বা, $x^2 + 1/x^2 = 38$ (i)
 বা, $(x - 1/x)^2 + 2 = 38$
 বা, $(x - 1/x)^2 = 36$
 $\therefore x - 1/x = 6$ (ii)
 আমরা জানি, $(x + 1/x)^2 = (x - 1/x)^2 + 4$
 $= 36 + 4 = 40$
 $\therefore x + 1/x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (iii)
 প্রদত্ত রাশি $= (x^8 - 1)/x^4 = x^4 - 1/x^4$
 $= (x^2 + 1/x^2)(x^2 - 1/x^2)$
 $= (x^2 + 1/x^2)(x + 1/x)(x - 1/x)$
 $= 38 \times 2\sqrt{10} \times 6$
 $= 456\sqrt{10}$
 নির্ণেয় মান: $456\sqrt{10}$

(গ) (ii) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $a^5 + 1/a^5 = 6726$.

উত্তর: (ii) নং হতে পাই, $a^2 = 17 + 12\sqrt{2}$
 বা, $a^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2$
 বা, $a^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2$
 $\therefore a = 3 + 2\sqrt{2}$ [বর্গমূল করে]
 $\therefore 1/a = 1/(3 + 2\sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})/(9 - 8) = 3 - 2\sqrt{2}$
 $\therefore a + 1/a = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$
 $a^2 + 1/a^2 = (a + 1/a)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$
 আবার, $a^3 + 1/a^3 = (a + 1/a)^3 - 3(a + 1/a) = 6^3 - 3 \times 6 = 216 - 18 = 198$
 বামপক্ষ $= a^5 + 1/a^5$
 $= (a^2 + 1/a^2)(a^3 + 1/a^3) - (a + 1/a)$
 $= 34 \times 198 - 6$
 $= 6732 - 6 = 6726 =$ ডানপক্ষ
 $\therefore a^5 + 1/a^5 = 6726$. (প্রমাণিত)

৫ $x = (\sqrt{5} + \sqrt{2})/3$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

(ক) $(2a - b)^3 - 27$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উত্তর: $(2a - b)^3 - 27$
 $= (2a - b)^3 - 3^3$
 $= (2a - b - 3)\{(2a - b)^2 + (2a - b) \times 3 + 3^2\}$
 $= (2a - b - 3)(4a^2 - 4ab + b^2 + 6a - 3b + 9)$

(খ) $3xy(9x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, $x = (\sqrt{5} + \sqrt{2})/3 \Rightarrow 3x = \sqrt{5} + \sqrt{2}$
এবং $y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$
 $\therefore 3x + y = \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$
এবং $3x - y = \sqrt{5} + \sqrt{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
ধ্রু রাশি $= 3xy(9x^2 + y^2)$
 $= \frac{3}{8} \times 4(3x)y \times 2((3x)^2 + y^2)$
 $= \frac{3}{8} \times \{(3x + y)^2 - (3x - y)^2\}\{(3x + y)^2 + (3x - y)^2\}$
 $= \frac{3}{8} \times \{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2\}$
 $= \frac{3}{8} \times (20 - 8)(20 + 8)$
 $= \frac{3}{8} \times 12 \times 28 = 126$
নির্ণেয় মান: 126।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\frac{27}{y^3} - y^3 = 34\sqrt{2}$

উত্তর: দেওয়া আছে, $y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$
 $\therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$
বা, $\frac{3}{y} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$
 $\therefore \frac{3}{y} - y = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
বামপক্ষ $= \frac{27}{y^3} - y^3 = \left(\frac{3}{y}\right)^3 - y^3$
 $= \left(\frac{3}{y} - y\right)^3 + 3 \cdot \frac{3}{y} \cdot y \cdot \left(\frac{3}{y} - y\right)$
 $= (2\sqrt{2})^3 + 9(2\sqrt{2})$
 $= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2} = 34\sqrt{2} = \text{ডানপক্ষ}$
 $\therefore \frac{27}{y^3} - y^3 = 34\sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

৬ কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি ৩.

(ক) সংখ্যাটিকে x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর: মেনে করি, সংখ্যাটি x

x এর গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যা $\frac{1}{x}$

প্রশ্নমতে, $x + \frac{1}{x} = 3$

নির্ণেয় সমীকরণ $x + \frac{1}{x} = 3$

(খ) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: ক-হতে প্রাপ্ত, $x + \frac{1}{x} = 3$

এখন, $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$
 $= 3^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$

$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

প্রদত্ত রাশি $= x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} (x - \frac{1}{x})$
 $= (\sqrt{5})^3 + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

নির্ণেয় মান $8\sqrt{5}$ ।

(গ) প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$ ।

উত্তর: ক-হতে প্রাপ্ত, $x + \frac{1}{x} = 3$

এখন, $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x})$
 $= 3^3 - 3 \times 3 = 27 - 9 = 18$

এবং $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$
 $= 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

এখন, $(x^3 + \frac{1}{x^3})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = 18 \times 7$

বা, $x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} = 126$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 126$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} + 3 = 126$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 126 - 3$

$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$ । (প্রমাণিত)

- ৭ কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 100 গুণ টাকা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

(ক) সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, সমিতির সদস্য সংখ্যা x

$\therefore$ জন প্রতি দেওয়া চাঁদার পরিমাণ $100x$

সুতরাং মোট চাঁদার পরিমাণ, $A = x \times 100x$

$\therefore A = 100x^2$

এটাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

(খ) সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

উত্তর: চাঁদা দেয় এমন সদস্য সংখ্যা ছিল $(x - 4)$ জন

এবং প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ হলো $(100x + 500)$ টাকা

সুতরাং মোট চাঁদা হলো $(x - 4)(100x + 500)$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $100x^2 = (x - 4)(100x + 500)$

বা, $100x^2 = 100x^2 + 500x - 400x - 2000$

বা, $100x^2 - 100x^2 = 100x - 2000$

বা, $100x - 2000 = 0$

বা, $100x = 2000$

বা, $x = 2000/100 = 20$

সমিতির সদস্য সংখ্যা 20 জন।

মোট চাঁদার পরিমাণ, $A = 100 \times (20)^2$ টাকা = 40000 টাকা।

(গ) মোট চাঁদার $\frac{1}{4}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 4% হারে 2 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

উত্তর: আমরা জানি, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে, $I = Pnr$

এখানে,

$P_1 = (40000 \text{ এর } \frac{1}{4}) \text{ টাকা} = 10000 \text{ টাকা}$

$n = 2$ বছর, $r_1 = 5/100$

এখানে,

$P_2 = (40000 - 10000) \text{ টাকা} = 30000 \text{ টাকা}$

$n = 2$ বছর, $r_2 = 4/100$

$\therefore I_1 = 10000 \times 2 \times 5/100 = 1000 \text{ টাকা}$

আবার, $I_2 = P_2nr_2 = 30000 \times 2 \times 4/100 = 2400 \text{ টাকা}$

$\therefore$ মোট মুনাফা, $I = I_1 + I_2 = 1000 + 2400 = 3400$

$\therefore$ মোট মুনাফা 3400 টাকা।

- ৮ বনভোজনে যাওয়ার জন্য একটি বাস 2400 টাকায় ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 10 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 8 (আট) টাকা বৃদ্ধি পেল।

(ক) মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার শতকরা কত তা নির্ণয় কর।

উত্তর: মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার

$$(8 \times 100)/10 = 80\%$$

∴ মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার 80%।

(খ) বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া নির্ণয় কর।

উত্তর: মনে করি, আগ্রহী যাত্রীসংখ্যা x জন

এবং মাথাপিছু বাস ভাড়া q টাকা

∴ মোট ভাড়া = qx টাকা

প্রকৃতপক্ষে বাসে যাত্রী যায় = $(x - 10)$ জন

এবং মাথাপিছু বাস ভাড়া = $(q + 8)$ টাকা

∴ মোট ভাড়া = $(q + 8)(x - 10)$ টাকা

শর্তমতে, $qx = (q + 8)(x - 10)$ (1)

এবং $qx = 2400$ (2)

(1) নং সমীকরণ হতে পাই, $qx = qx - 10q + 8x - 80$

বা, $qx + 8x - qx = 10q + 80$

বা, $8x = 10(q + 8)$

বা, $x = 10(q + 8)/8 = 5(q + 8)/4$

(2) নং সমীকরণে $x = 5(q + 8)/4$ বসিয়ে পাই, $q \times 5(q + 8)/4 = 2400$

বা, $q^2 + 8q = (2400 \times 4)/5$

বা, $q^2 + 8q = 1920$

বা, $q^2 + 8q - 1920 = 0$

বা, $q^2 + 48q - 40q - 1920 = 0$

বা, $q(q + 48) - 40(q + 48) = 0$

বা, $(q + 48)(q - 40) = 0$

হয়, $q - 40 = 0$

বা, $q = 40$

অথবা, $q + 48 = 0$

বা, $q = -48$; যা গ্রহণযোগ্য নয়

∴ বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া = $(40 + 8)$ টাকা = 48 টাকা।

(গ) বাস ভাড়ার সমপরিমাণ টাকার 5% হার মুনাফায় 13 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

উত্তর: এখানে, মূলধন, $P = 2400$ টাকা

সময়, $n = 13$ বছর

মুনাফার হার, $r = 5\% = 5/100$ টাকা

সরল মুনাফা, $I = Pnr = 2400 \times 13 \times 5/100$ টাকা = 1560 টাকা

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = P(1 + r)^n$

= $2400 \times (1 + 5/100)^{13}$ টাকা

= 4525.56 টাকা (প্রায়)

$$\text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = C - P$$

$$= (4525.56 - 2400) \text{ টাকা} = 2125.56 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য} = (2125.56 - 1560) \text{ টাকা} = 565.56 \text{ টাকা (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য } 565.56 \text{ টাকা (প্রায়)}।$$

৯ $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}, p = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$

(ক) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $16a^2 + \frac{1}{16a^2} - 2 + 16a - \frac{1}{a}.$

উত্তর: প্রদত্ত রাশি $= 16a^2 + \frac{1}{16a^2} - 2 + 16a - \frac{1}{a}$
 $= (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot \frac{1}{4a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 + 4\left(4a - \frac{1}{4a}\right)$
 $= \left(4a - \frac{1}{4a}\right)^2 + 4\left(4a - \frac{1}{4a}\right)$
 $= \left(4a - \frac{1}{4a}\right)\left(4a - \frac{1}{4a} + 4\right)$

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{x^6 - 1}{x^3} - \sqrt{2}\frac{x^4 + 1}{x^2} = 12\sqrt{2}.$

উত্তর: দেওয়া আছে, $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
 বা, $x^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
 বা, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (বর্গমূল করে)
 বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 এখন, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$
 এবং $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
 বামপক্ষ $= \frac{x^6 - 1}{x^3} - \sqrt{2}\frac{x^4 + 1}{x^2}$
 $= x^3 - \frac{1}{x^3} - \sqrt{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$
 $= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) - \sqrt{2}\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\right\}$
 $= (2\sqrt{2})^3 + 3(2\sqrt{2}) - \sqrt{2}\{(2\sqrt{3})^2 - 2\}$
 $= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}(12 - 2)$
 $= 22\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = \text{ডানপক্ষ}$
 $\therefore \frac{x^6 - 1}{x^3} - \sqrt{2}\frac{x^4 + 1}{x^2} = 12\sqrt{2}. \text{ (প্রমাণিত)}$

(গ) $p^3 - \frac{8}{p^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: দেওয়া আছে, $p = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
 বা, $\frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$
 $\therefore \frac{2}{p} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
 প্রদত্ত রাশি $= p^3 - \frac{8}{p^3} = p^3 - \left(\frac{2}{p}\right)^3$
 $= \left(p - \frac{2}{p}\right)^3 + 3 \cdot p \cdot \frac{2}{p} \left(p - \frac{2}{p}\right)$

$$\begin{aligned} &= \{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3})\}^3 + 6(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ &= (-2\sqrt{3})^3 + 6(-2\sqrt{3}) \\ &= -24\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -36\sqrt{3} \\ &\text{নির্ণেয় মান: } -36\sqrt{3}. \end{aligned}$$