



কৃতিত্ব — প্রশ্ন সংকলন

Mathematics — অধ্যায় ১৩: সসীম ধারা

MCQ + SQ (উত্তরসহ) + CQ (সমাধানসহ)

বিষয়

Mathematics

অধ্যায়

অধ্যায় ১৩: সসীম ধারা

প্রশ্নের ধরন

MCQ + SQ (উত্তরসহ) + CQ (সমাধানসহ)

মোট প্রশ্ন

৬২

১. $5 + 11 + 17 + \dots + 59$ ধারাটির পদসংখ্যা কত?

[১৬৮]

(ক) ৪

(খ) ৯

(গ) ১০ ✓

(ঘ) ১১

ব্যাখ্যা: ১ম পদ, $a = 5$, সাধারণ অন্তর, $d = 6$ এবং n তম পদ = ৫৯

$$\therefore n\text{-তম পদ} = a + (n - 1)d$$

$$\text{বা, } 59 = 5 + (n - 1)6$$

$$\text{বা, } 59 = 5 + 6n - 6$$

$$\text{বা, } 6n = 59 + 1$$

$$\therefore n = 10$$

৩. $1 + 4 + 16 + \dots$ ধারার কোন পদ ১০২৪?

[১৭০]

(ক) ৫ম

(খ) ৬ষ্ঠ ✓

(গ) ১০ম

(ঘ) ১১তম

ব্যাখ্যা: প্রথম পদ, $a = 1$

$$\text{এবং সাধারণ অনুপাত, } r = \frac{4}{1} = 4$$

$$\therefore n\text{ তম পদ} = ar^{n-1}$$

$$\text{বা, } 1024 = 1(4)^{n-1}$$

$$\text{বা, } 4^{n-1} = 1024$$

$$\text{বা, } 4^{n-1} = 4^5$$

$$\text{বা, } n - 1 = 5$$

$$\therefore n = 6$$

২. $1 + 3 + 5 + \dots + n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

[১৬৯]

$$(ক) \frac{n^2}{2}$$

$$(খ) \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(গ) \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$(ঘ) n^2 \quad \checkmark$$

ব্যাখ্যা: বিজোড় সংখ্যার প্রথম n পদের সমষ্টি $= n^2$

৪. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 =$ কত?

[১৭১]

$$(ক) n^2$$

$$(খ) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(গ) \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ঘ) \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \checkmark$$

৫. $\frac{1}{\sqrt{7}}, -1, \sqrt{7}$ অনুক্রমটির সাধারণ অনুপাত কোনটি?

[১৭২]

$$(ক) \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$(খ) -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$(গ) \sqrt{7}$$

$$(ঘ) -\sqrt{7} \quad \checkmark$$

ব্যাখ্যা: অনুক্রমটির সাধারণ অনুপাত $= -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}} =$

$$\frac{\sqrt{7}}{-1} = -\sqrt{7}$$

৬. $6 + 12 + a + 48 + \dots$ একটি গুণোত্তর ধারা। a এর মান কত?

[১৭৩]

- (ক) 36 (খ) 30
(গ) 24 ✓ (ঘ) 18

ব্যাখ্যা: $6 + 12 + a + 48 + \dots$ যেহেতু ধারাটি গুণোত্তর ধারা
 $\therefore \frac{12}{6} = \frac{a}{12}$
 বা, $6a = 144$
 বা, $a = \frac{144}{6}$
 $\therefore a = 24$

৭. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25 =$ কত?

[১৭৪]

- (ক) 35 (খ) 150
(গ) 325 ✓ (ঘ) 625

ব্যাখ্যা: ধারাটি $= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25$
 $= \frac{25(25 + 1)}{2} = 25 \times 13 = 325$

৮. $p + q + r + s + \dots$ গুণোত্তর ধারাতুক্ত হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

[১৭৫]

- (ক) $q - p = s - r$ (খ) $\frac{p}{q} = \frac{s}{r}$
(গ) $\frac{q}{p} = \frac{s}{r}$ ✓ (ঘ) $p - q = r -$

৯. $3 + 6 + 9 + \dots$ ধারাটির কতম পদ 99?

- (ক) 30 (খ) 33 ✓
(গ) 34 (ঘ) 35

ব্যাখ্যা: ১ম পদ, $a = 3$
 সাধারণ অন্তর, $d = 3$
 n -তম পদ $= 99$
 n -তম পদ $= a + (n - 1)d$
 বা, $99 = 3 + (n - 1)3$
 বা, $99 = 3n$
 $\therefore n = 33$

১০. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

- (ক) 0 (খ) 1 ✓
(গ) 2 (ঘ) 4

ব্যাখ্যা: ধারাটির জোড়সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 0$
 এবং বিজোড় সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 1$

১১. $\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \sqrt{3} - \dots$ ধারাটির ৮তম পদ কত?

- (ক) $-27\sqrt{3}$ (খ) -27 ✓
(গ) 27 (ঘ) $27\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $r = -\sqrt{3}$
 $\therefore$ ৮ম পদ $= ar^7 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times (-\sqrt{3})^7$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \times (-27\sqrt{3})$
 $= -27$

১২. $3 + m + n + 81 + \dots$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

(ক) 3 ✓

(খ) 4

(গ) 9

(ঘ) 27

ব্যাখ্যা: $ar^3 = 81$

বা, $ar^3 = 81$ [মান বিসেয়]

বা, $r^3 = 27$

বা, $r^3 = 3^3$

$\therefore r = 3$

১৫. প্রথম 100টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল কত?

(ক) 1000

(খ) 5000

(গ) 5050 ✓

(ঘ) 5100

ব্যাখ্যা: n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল =

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$\therefore$ ১ম 100টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল

$$= \frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

১৩. $3 + m + n + 81 + \dots$ কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি কত? [$n = 23$]

(ক) 138

(খ) 184

(গ) 253

(ঘ) 276 ✓

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{23(23+1)}{2} [n = 23]$$

$$= \frac{552}{2} = 276$$

১৪. $-16 - 8 - 0 + \dots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?

(ক) -8

(খ) 8 ✓

(গ) 2

(ঘ) $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: সাধারণ অন্তর, $= -8 - (-16) = -8 + 16 = 8$

১. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ কত?

উত্তর: মেনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r

$$\therefore \text{পঞ্চম পদ, } ar^{5-1} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad [\because n \text{ তম পদ} = ar^{n-1}]$$

$$\text{বা, } ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{এবং দশম পদ, } ar^{10-1} = \frac{8\sqrt{2}}{81}$$

$$\text{বা, } ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \dots\dots\dots(2)$$

সমীকরণ (2) কে (1) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \div \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } r^5 = \frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{3})^5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^5$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = ar^{3-1} = ar^2 = \frac{ar^4}{r^2}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2} \quad [\because ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ এবং } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}]$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

∴ ধারাটির তৃতীয় পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

২. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \dots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$

মেনে করি, ধারাটির n তম পদ $8\sqrt{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

প্রশ্নমতে, $ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2})^{n-1} = 16$$

$$(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$$

$$n - 1 = 8 \Rightarrow n = 8 + 1 = 9$$

ধারাটির ৯ম পদ $8\sqrt{2}$

৩. $5 + x + y + 135$ শ্রেণীভুক্ত ধারাত্ত্বক হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: $5 + x + y + 135$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{x}{5} = \frac{y}{x} \dots\dots\dots(i)$

$\therefore$ ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 5 \left(\frac{x}{5}\right)^3 = \frac{5 \cdot x^3}{5^3}$

প্রশ্নমতে, $\frac{5x^3}{5^3} = 135$

বা, $x^3 = \frac{5^3 \times 135}{5} = 5^3 \cdot 3^3 = (3 \times 5)^3$

$\therefore x = 5 \times 3 = 15$

সমীকরণ (i) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{15}{5} = \frac{y}{15}$, বা, $y = \frac{15 \times 15}{5} = 45$

নির্ণয় মান: $x = 15$ এবং $y = 45$

৪. $2 - 5 - 12 - 19 - \dots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং ১২ তম পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: ধারাটির ১ম পদ, $a = 2$

সাধারণ অন্তর, $d = -5 - 2 = -7$

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

$\therefore$ ধারাটির ১২ তম পদ $= a + (12 - 1)d$

$= -2 + (11)(-7) = 2 - 77 = -75$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অন্তর -7 এবং ১২ তম পদ -75

৫. $8 + 11 + 14 + 17 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 392?

উত্তর: প্রথম পদ, $a = 8$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 11 - 8 = 3$

মেনে করি, r তম পদ $= 392$

কিন্তু ধারাটির r তম পদ $= a + (r - 1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (r - 1)d = 392$

বা, $8 + (r - 1) \cdot 3 = 392 - 8$

বা, $(r - 1) \cdot 3 = 392 - 8$

৬. $4 + 7 + 10 + 13 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 301?

উত্তর: প্রদত্ত ধারা, $4 + 7 + 10 + 13 + \dots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 4$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 4 = 3$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ 301

আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\therefore a + (n - 1)d = 301$

বা, $4 + (n - 1)3 = 301$

বা, $3n - 3 + 4 = 301$

বা, $3n + 1 = 301$

বা, $3n = 301 - 1 = 300$

বা, $n = \frac{300}{3} = 100$

অতএব, প্রদত্ত ধারার 100 তম পদ 301।

৭. কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n এবং n তম পদ m হলে, ধারাটির $(m+n)$ তম পদ কত?

উত্তর: ধরি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$

প্রশ্নমতে, m তম পদ $a + (m - 1)d = n \dots(1)$

এবং n তম পদ $a + (n - 1)d = m \dots(2)$

(1) নং থেকে (2) নং বিয়োগ করে পাই,

$(m - 1 - n + 1)d = n - m$

বা, $(m - n)d = -(m - n)$

বা, $d = -1 \dots(3)$

$\therefore (m + n)$ তম পদ, $a + (m + n - 1)d = a + (m - 1)d + nd$

$= n + n \times (-1)$ [(1) ও (3) নং হতে]

$= n - n = 0$

$\therefore (m + n)$ তম পদ 0।

৮. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: সমাধান: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$

পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore$ ধারাটির n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2 \times 1 + (n - 1)2\}$

$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$

$\therefore$ ধারাটির n পদের সমষ্টি n^2

৯. $8 + 16 + 24 + \dots$ ধারাটির প্রথম ৯ টি পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: সমাধান: প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার

প্রথম পদ, $a = 8$, সাধারণ অন্তর, $d = 16 - 8 = 8$

পদ সংখ্যা, $n = 9$

$\therefore$ যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{9}{2}\{2 \cdot 8 + (9 - 1)8\}$

$= \frac{9}{2}(16 + 8 \times 8)$

$= \frac{9}{2}(16 + 64) = \frac{9}{2} \times 80 = 360$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম ৯ টি পদের সমষ্টি 360।

১০. $5 + 11 + 17 + 23 + \dots + 59 =$ কত?

উত্তর: সমাধান: $5 + 11 + 17 + 23 + \dots + 59$

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অন্তর, $d = 11 - 5 = 6$

শেষ পদ, $l = 59$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ, $l = 59$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\therefore a + (n - 1)d = 59$

বা, $5 + (n - 1)6 = 59$

বা, $(n - 1)6 = 59 - 5 = 54$

বা, $n - 1 = \frac{54}{6} = 9$

বা, $n = 9 + 1 = 10$

$\therefore$ যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{10}{2}\{2 \cdot 5 + (10 - 1)6\}$

$= 5(10 + 9 \times 6) = 5(10 + 54)$

১১. $29 + 25 + 21 + \dots - 23 =$ কত?

উত্তর: সমাধান: $29 + 25 + 21 + \dots - 23$

এটি একটি সমান্তর ধারা যার,

প্রথম পদ, $a = 29$

সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$

পদ সংখ্যা $= n$, শেষ পদ, $l = -23$

কিন্তু, $l = a + (n - 1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (n - 1)d = -23$

বা, $29 + (n - 1)(-4) = -23$

বা, $-4(n - 1) = -23 - 29$

বা, $-4(n - 1) = -52$

বা, $n - 1 = \frac{-52}{-4} = 13$

বা, $n = 13 + 1$

$\therefore n = 14$

$\therefore$ যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{14}{2}\{2 \cdot 29 + (14 - 1)(-4)\} [\because n = 14, a = 29 \text{ এবং } d = -4]$

$= 7\{58 + 13 \times (-4)\}$

$= 7(58 - 52) = 7 \times 6 = 42$

নির্ণেয় সমষ্টি 42।

১২. কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23 টি পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: সমাধান: মেনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$\therefore$ সমান্তর ধারাটির n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= a + (12 - 1)d = a + 11d$

প্রশ্নমতে, $a + 11d = 77 \dots\dots\dots (1)$

আবার, কোনো সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি,

$S_{23} = \frac{23}{2}\{2a + (23 - 1)d\}$

$= \frac{23}{2}(2a + 22d) = \frac{23 \times 2}{2}(a + 11d)$

$= 23 \times 77 [(1) \text{ নং হতে}]$

$= 1771$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি 1771।

১৩. একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: সমাধান: মেনে করি, সমান্তর ধারাটির 1ম = a পদ এবং সাধারণ অন্তর = d

$$\therefore n \text{ তম পদ} = a + (n - 1)d$$

$$16 \text{ তম পদ} = a + (16 - 1)d = a + 15d$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } a + 15d = -20 \dots\dots\dots (1)$$

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$$

$\therefore$ ধারাটির 31 পদের সমষ্টি,

$$S_{31} = \frac{31}{2}\{2a + (31 - 1)d\}$$

$$= \frac{31}{2}(2a + 30d)$$

$$= \frac{31}{2} \cdot 2(a + 15d)$$

$$= 31 \times (-20) [(1) \text{ নং হতে মান বসিয়ে}]$$

$$= -620$$

$$\therefore \text{ধারাটির প্রথম 31 পদের সমষ্টি } -620।$$

১৪. $9 + 7 + 5 + \dots\dots\dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে,

$$9 + 7 + 5 + \dots\dots\dots \text{ ধারাটির } n \text{ সংখ্যক পদের যোগফল } -144$$

প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার

$$\text{প্রথম পদ, } a = 9 \text{ এবং সাধারণ অন্তর, } d = 7 - 9 = -2$$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\} = -144$$

$$\text{বা, } \frac{n}{2}\{2 \times 9 + (n - 1)(-2)\} = -144$$

$$\text{বা, } n(18 - 2n + 2) = -288 \text{ বা, } n(20 - 2n) = -288$$

১৫. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots\dots\dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: মেনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

$$\text{সাধারণ অন্তর, } d = 4 - 2 = 2, \text{ পদসংখ্যা} = n$$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$$

$$= \frac{n}{2}\{2 \cdot 2 + (n - 1)2\}$$

$$= n\{2 + n - 1\} = n(n + 1) = n^2 + n$$

$$\text{শর্তমতে, } n^2 + n = 2550$$

$$\text{বা, } n^2 + n - 2550 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 51n - 50n - 2550 = 0$$

$$\text{বা, } n(n + 51) - 50(n + 51) = 0$$

$$\text{বা, } (n + 51)(n - 50) = 0$$

$$\text{হয়, } n + 51 = 0 \text{ অথবা, } n - 50 = 0$$

$$n = -51 \text{ বা, } n = 50$$

কিন্তু $n \neq -51$, কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$$\therefore n \text{ এর মান } 50।$$

১৬. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n + 1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় করো।

উত্তর: দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি $S_n = n(n + 1)$

$n = 1$ হলে, ধারাটির প্রথম পদ $= 1(1 + 1) = 2 = S_1$

$n = 2$ হলে, ধারাটির প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি $= 2(2 + 1) = 6 = S_2$

$\therefore$ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= S_2 - S_1 = 6 - 2 = 4$

আবার, $n = 3$ হলে, ধারাটির প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি $= 3(3 + 1) = 12 = S_3$

$\therefore$ ধারাটির তৃতীয় পদ $= S_3 - S_2 = 12 - 6 = 6$

$\therefore$ ধারাটি $2 + 4 + 6 + \dots$

১৭. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n + 1)$ ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: দেওয়া আছে, ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = n(n + 1)$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10 টি পদের সমষ্টি,

$S_{10} = 10(10 + 1) = 10 \times 11 = 110$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10 টি পদের সমষ্টি 110।

১৮. একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: মেনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$

এখন, 12 পদের সমষ্টি,

$S_{12} = \frac{12}{2} \{2a + (12 - 1)d\}$

বা, $144 = 6(2a + 11d)$

বা, $2a + 11d = \frac{144}{6}$

$\therefore 2a + 11d = 24 \dots\dots\dots(1)$

আবার, 20 পদের সমষ্টি,

$S_{20} = \frac{20}{2} \{2a + (20 - 1)d\}$

বা, $560 = 10(2a + 19d)$

বা, $2a + 19d = \frac{560}{10}$

১৯. দেখাও যে, $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 125 = 169 + 171 + 173 + \dots + 209$

উত্তর: বামপক্ষ $= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 125$

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার

প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$

শেষ পদ, $l = 125$

পদ সংখ্যা $= n$

কিন্তু, শেষ পদ, $l = a + (n - 1)d$

প্রমোতে, $a + (n - 1)d = 125$

বা, $1 + (n - 1)2 = 125$

বা, $(n - 1)2 = 125 - 1$

বা, $(n - 1)2 = 124$

বা, $n - 1 = \frac{124}{2} = 62$

বা, $n = 62 + 1 = 63$

$\therefore$ ধারাটির যোগফল $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{63}{2}\{2 \cdot 1 + (63 - 1)2\}$

$= \frac{63}{2}\{2 + 62 \cdot 2\} = \frac{63}{2} \cdot 2(1 + 62)$

$= 63 \times 63 = 3969$

ডানপক্ষ $= 169 + 171 + 173 + \dots + 209$

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার

প্রথম পদ, $a = 169$, সাধারণ অন্তর, $d = 171 - 169 = 2$

পদ সংখ্যা $= n$, শেষ পদ, $l = 209$

কিন্তু শেষ পদ, $l = a + (n - 1)d$

শর্তমতে, $a + (n - 1)d = 209$

বা, $169 + (n - 1)2 = 209$

বা, $(n - 1)2 = 209 - 169 = 40$

বা, $n - 1 = \frac{40}{2} = 20$

বা, $n = 20 + 1 = 21$

$\therefore$ যোগফল $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{21}{2}\{2 \cdot 169 + (21 - 1)2\}$

$= \frac{21}{2} \times 2(169 + 20) = 21 \times 189 = 3969$

$\therefore 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 125 = 169 + 171 + 173 + \dots + 209$ । (দেখানো হলো)

২০. এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

উত্তর: প্রথম কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করেন 1 টাকা

দ্বিতীয় কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করেন $(1 + 2) = 3$ টাকা

তৃতীয় কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করেন $(3 + 2) = 5$ টাকা

∴ টাকা পরিশোধের কিস্তি একটি সমান্তর ধারা যার,

প্রথম পদ, $a = 1$, সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$

মনে করি, ঐ ব্যক্তি n সংখ্যক কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করবেন।

অতএব, পদসংখ্যা $= n$

$$\therefore n \text{ পদের সমষ্টি} = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

$$= \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2\}$$

$$= \frac{n}{2} \times \{2 + (n - 1) \cdot 2\}$$

$$= \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

$$\text{শর্তমতে, } n^2 = 2500$$

$$\text{বা, } \sqrt{n^2} = \sqrt{2500} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } n = 50$$

অতএব, 50 টি কিস্তিতে ঋণ শোধ করতে পারবেন।

২১. $64 + 32 + 16 + 8 + \dots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 64$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$; ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

∴ অষ্টম পদ $= ar^{8-1}$ [$\therefore n$ তম পদ $= ar^{n-1}$]

$$= 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 2^6 \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 2^1}$$

$$= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

২২. $3 + 9 + 27 + \dots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার,

১ম পদ, $a = 3$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{3} = 3 > 1$ এবং পদ সংখ্যা $n = 14$

$$\therefore 14 \text{ ম } 14 \text{ টি পদের সমষ্টি, } S_{14} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{3(3^{14} - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{3}{2}(3^{14} - 1)$$

$$\therefore \text{ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি } \frac{3}{2}(3^{14} - 1)$$

২৩. $128 + 64 + 32 + \dots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার,

প্রথম পদ, $a = 128$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

মেনে করি, ধারাটির n তম পদ $\frac{1}{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ, ar^{n-1}

তাহলে, $ar^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

বা, $n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1 = 9$

$\therefore$ ধারাটির ৯ম পদ $\frac{1}{2}$

২৪. $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাতুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ, $a = 3$

মেনে করি, সাধারণ অনুপাত $= r$

তাহলে, ২য় পদ, $ar = x$ [$\because n$ তম পদ $= ar^{n-1}$]

৩য় পদ, $ar^2 = y$; ৪র্থ পদ, $ar^3 = z$; ৫ম পদ, $ar^4 = 243$

এখন, $ar^4 = 243$

বা, $3r^4 = 243$

বা, $r^4 = 81 = 3^4$

$\therefore r = 3$

২য় পদ, $x = 3 \times 3 = 9$

৩য় পদ, $y = 3 \times 3^2 = 3 \times 9 = 27$

৪র্থ পদ, $z = 3 \times 3^3 = 3 \times 27 = 81$

নির্ণয়ে মান: $x = 9, y = 27$ এবং $z = 81$.

২৫. $2 - 4 + 8 - 16 + \dots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: $2 - 4 + 8 - 16 + \dots$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার ১ম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-4}{2} = -2 < 1$

পদ সংখ্যা, $n = 7$

$\therefore$ প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি

$$S_7 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{2(1-(-2)^7)}{1-(-2)} = \frac{2(1+128)}{1+2} = \frac{2 \times 129}{3} = 86$$

$\therefore$ প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি ৮৬.

২৬. $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ধারাটির $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{1} = -1 < 1$

$\therefore$ ধারাটি $(2n + 1)$ পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^{2n+1})}{1-r}$

$$= \frac{1 \cdot (1 - (-1)^{2n+1})}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{1(1 - (-1))}{1 - (-1)} = \frac{1(1+1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore$ ধারাটির $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 1.

২৭. $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি, $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots$ 10টি পদ

$$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + \dots$$
 10টি পদ

$$= \log 2 + 2 \log 2 + 3 \log 2 + 4 \log 2 + \dots$$
 10টি পদ

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \log 2$$

$$= \frac{10(10+1)}{2} \log 2 \left[\because 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= 5 \times 11 \log 2 = 55 \log 2$$

$\therefore$ প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $55 \log 2$.

২৮. $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

উত্তর: সমাধান: $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 2$ এবং

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{4}{2} = 2 > 1$

$$\therefore n \text{ পদের সমষ্টি, } S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 254$$

$$\text{বা, } 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 254$$

$$\text{বা, } \frac{2^n - 1}{1} = \frac{254}{2}$$

$$\text{বা, } 2^n - 1 = 127$$

$$\text{বা, } 2^n = 127 + 1$$

$$\text{বা, } 2^n = 128$$

$$\text{বা, } 2^n = 2^7$$

$$\therefore n = 7$$

২৯. $2 - 2 + 2 - 2 + \dots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

উত্তর: সমাধান: প্রদত্ত ধারার ১ম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

পদ সংখ্যা, $m = 2n + 2$

সুতরাং এটি একটি গুণোত্তর ধারা যেখানে, $r < 1$

$$\therefore \text{সমষ্টি, } S = \frac{a(1-r^m)}{1-r} = \frac{2(1-(-1)^{2n+2})}{1-(-1)} \text{ [মান বিসেয়]}$$

$$= \frac{2(1-1)}{1+1} \left[\because (2n + 2) \text{ একটি জোড় স্বাভাবিক যেকোনো সংখ্যা} \right]$$

$$= \frac{2 \times 0}{2} = 0$$

$\therefore$ ধারাটির $(2n + 2)$ পদের সমষ্টি 0 (শূন্য)।

৩০. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় করো এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: সমাধান: আমরা জানি,

$$\text{প্রথম } n \text{ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = 441$$

$$\text{বা, } \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = (21)^2$$

$$\text{বা, } \frac{n(n+1)}{2} = 21 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } n(n+1) = 42$$

$$\text{বা, } n^2 + n - 42 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 7n - 6n - 42 = 0$$

$$\text{বা, } n(n+7) - 6(n+7) = 0$$

$$\text{বা, } (n+7)(n-6) = 0$$

$$\text{হয়, } n+7 = 0 \text{ অথবা, } n-6 = 0$$

$$\therefore n = -7 \therefore n = 6$$

[$n = -7$ গ্রহণযোগ্য নয় কেননা পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।]

$$\therefore \text{ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি, } S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

$$\therefore n = 6 \text{ এবং সমষ্টি } S = 21$$

৩১. দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2$ ।

উত্তর: সমাধান: বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = \left\{ \frac{10(10+1)}{2} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{10 \times 11}{2} \right\}^2 = (55)^2 = 3025$$

$$\text{ডানপক্ষ} = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2$$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = 5 \times 11 = 55$$

$$\text{সুতরাং, } (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2$$

$$= (55)^2 = 3025$$

$$\text{অতএব, } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2 \text{ (দেখানো হলো)}$$

৩২. $\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = 210$ হলে, n এর মান কত?

উত্তর: সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = 210$

$$\text{বা, } \frac{\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = 210 \left[\because 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ এবং } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

৩৩. $3 + 7 + 11 + 15 + \dots$ ধারার পদগুলো নিয়ে গঠিত অনুক্রমটির সাধারণ পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি: $3 + 7 + 11 + 15 + \dots$

এখানে, ১ম পদ, $a = 3$

সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 3 = 4$

যেহেতু সাধারণ অন্তর সমান, তাই এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n -তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$= 3 + (n - 1)4$$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$= 4n - 1$$

উত্তর: $4n - 1$ ।

৩৪. $256 + 128 + 64 + \dots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{32}$ তা নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি: $256 + 128 + 64 + \dots$

এখানে, ১ম পদ, $a = 256$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত সমান, তাই এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধরি, ধারাটির n -তম পদ $= \frac{1}{32}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n -তম পদ $= ar^{n-1}$

$$ar^{n-1} = \frac{1}{32}$$

$$256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32 \times 256}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{8192}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$$

$$n - 1 = 13$$

$$n = 13 + 1$$

$$\therefore n = 14 \text{ (Ans.)}$$

৩৫. সূত্র প্রয়োগ করে $8^2 + 9^2 + 10^2 + \dots + 15^2$ ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত ধারাটি: $8^2 + 9^2 + 10^2 + \dots + 15^2$

আমরা জানি,

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

১ থেকে ১৫ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি থেকে ১ থেকে ৭ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি বিয়োগ করে পাই:

$$\begin{aligned} &= (1^2 + \dots + 15^2) - (1^2 + \dots + 7^2) \\ &= \frac{15(15+1)(2 \times 15 + 1)}{6} - \frac{7(7+1)(2 \times 7 + 1)}{6} \\ &= \frac{(15 \times 16 \times 31)}{6} - \frac{7 \times 8 \times 15}{6} \\ &= (5 \times 8 \times 31) - (7 \times 4 \times 5) \\ &= 1240 - 140 \\ &= 1100 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৩৬. কোনো সমান্তর ধারার ১৭ তম পদ ৪৩ হলে, এর প্রথম ৩৩টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, সমান্তর ধারাটির ১ম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n -তম পদ = $a + (n-1)d$

প্রশ্নমতে, ১৭তম পদ = ৪৩

$$\therefore a + (17-1)d = 43$$

$$a + 16d = 43 \dots\dots(i)$$

আমরা জানি,

n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

n পদের সমষ্টি, এখানে $n = 33$

$$S_{33} = \frac{33}{2}\{2a + (33-1)d\}$$

$$= \frac{33}{2}(2a + 32d)$$

$$= \frac{33}{2} \cdot 2(a + 16d)$$

$$= 33(a + 16d)$$

$$= 33 \times 43$$

$$= 1419 \text{ (Ans.)}$$

- ১ (i) $7 + p + q + s + 16807 + \dots$ একটি গুণোত্তর ধারা। (ii) $7 + 12 + 17 + 22 + \dots$ ধারাটির ১ম n সংখ্যক পদের যোগফল 1090।

[বরিশাল বোর্ড ২০২২]

- (ক) $4 + 7 + 10 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 304? নির্ণয় করো।

উত্তর: দেওয়া আছে, $4 + 7 + 10 + \dots$

প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা যার, প্রথম পদ, $a = 4$

সাধারণ অন্তর, $d = (7 - 4) = 3$

ধরি, ধারাটির n তম পদ 304

শর্তমতে, $a + (n - 1)d = 304$

বা, $4 + (n - 1) \times 3 = 304$

বা, $(n - 1) \times 3 = 304 - 4$

বা, $(n - 1) \times 3 = 300$

বা, $(n - 1) = \frac{300}{3} = 100$

বা, $n = 100 + 1$

বা, $n = 101$

$\therefore$ ধারাটির 101 তম পদ হলো 304।

- (খ) p, q, s এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা: $7 + p + q + s + 16807 + \dots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 7$

এবং সাধারণ অনুপাত = r

$\therefore$ ধারাটির ৫ম পদ = $ar^{5-1} = ar^4$

প্রথমতে, $ar^4 = 16807$

বা, $7r^4 = 16807$

বা, $r^4 = \frac{16807}{7} = 2401 = 7^4$

$\therefore r = 7$

$\therefore$ ধারাটির ২য় পদ = ar^{2-1}

বা, $p = ar$

বা, $p = 7 \times 7$

$\therefore p = 49$

ধারাটির ৩য় পদ = ar^{3-1}

বা, $q = ar^2$

বা, $q = 7 \times (7)^2$

$\therefore q = 343$

ধারাটির ৪র্থ পদ = ar^{4-1}

বা, $s = ar^3$

বা, $s = 7 \times (7)^3$

$\therefore s = 2401$

নির্ণয়ে $p = 49, q = 343, s = 2401$

(গ) (ii) নং ব্যবহার করে n এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: (ii) নং ধারাটি: $7 + 12 + 17 + 22 + \dots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 7$; সাধারণ অন্তর, $d = 12 - 7 = 5$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

প্রথমতে, $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\} = 1090$

বা, $\frac{n}{2}\{2 \times 7 + (n - 1)5\} = 1090$

বা, $\frac{n}{2}(14 + 5n - 5) = 1090$

বা, $n(9 + 5n) = 1090 \times 2$

বা, $9n + 5n^2 = 2180$

বা, $5n^2 + 9n - 2180 = 0$

বা, $5n^2 + 109n - 100n - 2180 = 0$

বা, $n(5n + 109) - 100n - 2180 = 0$

বা, $(n - 20)(5n + 109) = 0$

হয়, $n - 20 = 0$

$\therefore n = 20$

অথবা, $5n + 109 = 0$

বা, $5n = -109$

$n = \frac{-109}{5}$, গ্রহণযোগ্য নয়

কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

নির্ণেয় মান $n = 20$

২

(i) একটি গুণোত্তর ধারার ৬ষ্ঠ পদ $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $-\frac{1}{27\sqrt{3}}$ (ii) কোনো সমান্তর ধারার ১ম ১০টি পদের সমষ্টি ১৫০ এবং ১ম ২০টি পদের সমষ্টি ৫০০।

[বরিশাল বোর্ড ২০২৩]

(ক) $3 + 7 + 11 + \dots$ ধারাটির কোন পদ ৩৯৯?

উত্তর: প্রদত্ত ধারা $= 3 + 7 + 11 + \dots$

সমান্তর ধারাটির ১ম পদ, $a = 3$

সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 3 = 4$

ধরি, ধারাটির n তম পদ ৩৯৯।

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$399 = 3 + (n - 1)4$$

$$399 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$$

$$4n = 399 + 1 = 400$$

$$n = \frac{400}{4} \therefore n = 100$$

$\therefore$ ধারাটির ১০০তম পদ ৩৯৯।

(খ) গুণোত্তর ধারাটি নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n -তম পদ $= ar^{n-1}$

$$\text{দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারার ৬ষ্ঠ পদ, } ar^{6-1} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{বা, } ar^5 = -\frac{\sqrt{3}}{9} \dots (i)$$

$$\text{এবং দশম পদ, } ar^{10-1} = -\frac{1}{27\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } ar^9 = -\frac{1}{27\sqrt{3}} \dots (ii)$$

এখন (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^9}{ar^5} = \frac{-\frac{1}{27\sqrt{3}}}{-\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

$$\text{বা, } r^4 = -\frac{1}{27\sqrt{3}} \times \left(-\frac{9}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

এখন, সমীকরণ (i) এ $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বসিয়ে পাই

$$a \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{বা, } a \times \frac{1}{9\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{বা, } a = -\frac{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore \text{গুণোত্তর ধারাটি} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= -3 + \frac{(-3)1}{\sqrt{3}} + (-3) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (-3) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + \dots \\
&= -3 - \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots \\
&\text{নির্ণেয় গুণোত্তর ধারা } -3 - \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots
\end{aligned}$$

(গ) ধরি, সমান্তর ধারাটির ১ম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d হলে সমান্তর ধারার ৩৫ তম পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, সমান্তর ধারাটির ১ম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n -সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

দেওয়া আছে, সমান্তর ধারাটির প্রথম ১০টি পদের সমষ্টি = 150

$$\text{বা, } \frac{10}{2}\{2a + (10 - 1)d\} = 150$$

$$\text{বা, } 5(2a + 9d) = 150$$

$$\text{বা, } 2a + 9d = \frac{150}{5}$$

$$\therefore 2a + 9d = 30 \dots (1)$$

এবং সমান্তর ধারাটির প্রথম ২০টি পদের সমষ্টি = 500

$$\frac{20}{2}\{2a + (20 - 1)d\} = 500$$

$$\text{বা, } 10(2a + 19d) = 500$$

$$\text{বা, } 2a + 19d = \frac{500}{10}$$

$$\therefore 2a + 19d = 50 \dots (2)$$

এখন, সমীকরণ (2) হতে (1) বিয়োগ করে পাই,

$$2a + 19d - 2a - 9d = 50 - 30$$

$$\text{বা, } 10d = 20$$

$$\text{বা, } d = \frac{20}{10}$$

$$\therefore d = 2$$

সমীকরণ (1) এ $d = 2$ বসিয়ে পাই

$$2a + 9 \times 2 = 30$$

$$\text{বা, } 2a = 30 - 18 = 12$$

$$\text{বা, } a = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{ধারাটির } n \text{ তম পদ} = a + (n - 1)d$$

$$\text{ধারাটির ৩৫ তম পদ} = 6 + (35 - 1)2 = 6 + 34 \times 2 = 6 + 68 = 74$$

সমান্তর ধারাটির ৩৫ তম পদ ৭৪।

- ৩ প্রশ্ন ৩: $6 + 12 + 24 + 48 + \dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 1530 এবং একটি সমান্তর ধারার প্রথম p পদের সমষ্টি q এবং প্রথম q পদের সমষ্টি p ।

[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

- (ক) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 15^2$ ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি

$$\text{অর্থাৎ, } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

এখানে, $n = 15$

প্রথম 15টি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি,

$$\begin{aligned} &= \frac{15(15+1)(2 \times 15+1)}{6} \\ &= \frac{15 \times 16(30+1)}{6} = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1240 \end{aligned}$$

নির্ণেয় সমষ্টি 1240

- (খ) n এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত ধারা: $6 + 12 + 24 + 48 + \dots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 6$, সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{12}{6} = 2 > 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; \text{ যখন } r > 1 \\ &= \frac{6(2^n - 1)}{2 - 1} = 6(2^n - 1) \end{aligned}$$

শর্তমতে, $6(2^n - 1) = 1530$

$$\text{বা, } 2^n - 1 = \frac{1530}{6}$$

$$\text{বা, } 2^n - 1 = 255$$

$$\text{বা, } 2^n = 255 + 1 = 256 = 2^8$$

$$\therefore n = 8$$

নির্ণেয় মান: $n = 8$

- (গ) সমান্তর ধারাটির প্রথম $(p + q)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: মেন করি, সমান্তর ধারাটির ১ম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore \text{ধারাটির প্রথম } p \text{ পদের সমষ্টি} = \frac{p}{2}\{2a + (p-1)d\}$$

$$\text{এবং প্রথম } q \text{ পদের সমষ্টি} = \frac{q}{2}\{2a + (q-1)d\}$$

$$\text{শর্তমতে, } \frac{p}{2}\{2a + (p-1)d\} = q$$

$$\therefore 2a + (p-1)d = \frac{2q}{p} \dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \frac{q}{2}\{2a + (q-1)d\} = p$$

$$\therefore 2a + (q-1)d = \frac{2p}{q} \dots\dots (ii)$$

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(p - 1 - q + 1)d = \frac{2q}{p} - \frac{2p}{q}$$

$$\text{বা, } (p - q)d = \frac{2q^2 - 2p^2}{pq}$$

$$\text{বা, } (p - q)d = \frac{-2(p^2 - q^2)}{pq}$$

$$\text{বা, } d = \frac{-2(p + q)(p - q)}{pq(p - q)}$$

$$\therefore d = \frac{-2(p + q)}{pq} \dots\dots (iii)$$

$\therefore$ সমান্তর ধারাটির প্রথম $(p + q)$ পদের সমষ্টি

$$= \frac{p + q}{2} \{2a + (p + q - 1)d\}$$

$$= \frac{p + q}{2} \{2a + (p - 1)d + qd\}$$

$$= \frac{p + q}{2} \left\{ \frac{2q}{p} + q \cdot \frac{-2(p + q)}{pq} \right\} \quad [(i) \text{ ও } (iii) \text{ নং হতে}]$$

$$= \frac{p + q}{2} \left\{ \frac{2q}{p} - \frac{2(p + q)}{p} \right\}$$

$$= \frac{p + q}{2} \left\{ \frac{2q - 2p - 2q}{p} \right\}$$

$$= \frac{p + q}{2} \times \left(\frac{-2p}{p} \right)$$

$$= -(p + q)$$

নির্ণেয় ধারাটির $(p + q)$ পদের সমষ্টি $-(p + q)$

- 8 একটি জ্যামিতার ধারার 5th পদ $2\sqrt{2}$ এবং 7th পদ $4\sqrt{2}$ এবং সমান্তর ধারাটির ১ম 10 পদের সমষ্টি 275 এবং ১ম 20 পদের সমষ্টি 1050।

[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]

- (ক) $3 + 5 + 7 + 9 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 303?

উত্তর: ধারাটি: $3 + 5 + 7 + 9 + \dots$

এখানে, ১ম পদ, $a = 3$

সাধারণ অন্তর, $d = 5 - 3 = 2$

ধরি, ধারাটির n তম পদ 303।

$$a + (n - 1)d = 303$$

$$\text{বা, } 3 + (n - 1)2 = 303$$

$$\text{বা, } (n - 1)2 = 303 - 3 = 300$$

$$\text{বা, } n - 1 = \frac{300}{2} = 150$$

$$\therefore n = 150 + 1 = 151$$

অতএব, ধারাটির 151 তম পদ 303।

- (খ) জ্যামিতার ধারাটি নির্ণয় কর এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, জ্যামিতার ধারার ১ম পদ = a

সাধারণ অনুপাত = r

$$5^{\text{th}} \text{ পদ} = ar^{n-1} = ar^{5-1} = ar^4$$

$$7^{\text{th}} \text{ পদ} = ar^{7-1} = ar^6$$

$$\text{শর্তমতে, } ar^4 = 2\sqrt{2} \dots (1)$$

$$ar^6 = 4\sqrt{2} \dots (2)$$

সমীকরণ (2)নং কে (1) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^6}{ar^4} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } r^2 = 2$$

$$\text{বা, } r = \sqrt{2} > 1$$

r এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$a \cdot (\sqrt{2})^4 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } a \cdot 4 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } a = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{বা, } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ধারাটির ১ম পদ, } a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$২য় \text{ পদ, } ar^{2-1} = ar = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$$

$$৩য় \text{ পদ, } ar^{3-1} = ar^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$$

$$৪র্থ \text{ পদ, } ar^{4-1} = ar^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} = 2$$

$$\therefore \text{ধারাটি: } \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} \dots$$

আমরা জানি,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; r > 1$$

$$\text{বা, } S_{10} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^{10} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\frac{32-1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{31}{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{নির্ণেয় ধারা: } \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots \text{ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি } \frac{31}{2-\sqrt{2}}$$

(গ) সমান্তর ধারাটির ১ম ৩০ পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, সমান্তর ধারার ১ম পদ = a

সাধারণ অন্তর = d

ধারাটির ১ম ১০ পদের সমষ্টি = ২৭৫

$$\text{বা, } \frac{10}{2}\{2a + (10 - 1)d\} = 275$$

$$\text{বা, } 5(2a + 9d) = 275$$

$$\text{বা, } 2a + 9d = 55 \dots (1)$$

আবার, ধারাটির ১ম ২০ পদের সমষ্টি = ১০৫০

$$\frac{20}{2}\{2a + (20 - 1)d\} = 1050$$

$$\text{বা, } 10(2a + 19d) = 1050$$

$$\text{বা, } 2a + 19d = 105 \dots (2)$$

সমীকরণ (২)নং হতে (১) নং বিয়োগ করে পাই,

$$2a + 19d - 2a - 9d = 105 - 55$$

$$\text{বা, } 10d = 50$$

$$\text{বা, } d = 5$$

d এর মান সমীকরণ (১) নং এ বসিয়ে পাই,

$$2a + 9d = 55$$

$$\text{বা, } 2a + 9 \times 5 = 55$$

$$\text{বা, } 2a = 55 - 45 = 10$$

$$\therefore a = 5$$

ধারাটির ১ম ৩০টি পদের সমষ্টি,

$$S_{30} = \frac{30}{2}\{2 \times 5 + (30 - 1)5\}$$

$$= 15(10 + 29 \times 5)$$

$$= 15 \times 155 = 2325$$

নির্ণেয় সমষ্টি: ২৩২৫।

৫ একটি সমান্তর ধারার p তম পদ $(p + q)^2$ ও q তম পদ $(p - q)^2$ এবং $\frac{x}{22} = \frac{mn}{m+n}$ ।

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল]

(ক) প্রথম ১২টি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: আমরা জানি,

প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, $S_n = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

∴ প্রথম ১২টি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি,

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12\{4 \times (12)^2 - 1\}}{3} = \frac{12(4 \times 144 - 1)}{3} \\ &= \frac{12(576 - 1)}{3} = \frac{12 \times 575}{3} = 2300 \end{aligned}$$

নির্ণেয় সমষ্টি ২৩০০।

(খ) দেখাও যে, $\frac{x+11m}{x-11m} + \frac{x+11n}{x-11n} = 2$ ।

উত্তর: দেওয়া আছে, $\frac{x}{22} = \frac{mn}{m+n}$

বা, $\frac{x}{11m} = \frac{2n}{m+n}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{2}{m}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{x+11m}{x-11m} = \frac{2n+m+n}{2n-m-n}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$$\therefore \frac{x+11m}{x-11m} = \frac{3m+n}{n-m} \dots \dots (1)$$

আবার, $\frac{x}{22} = \frac{mn}{m+n}$

বা, $\frac{x}{11n} = \frac{2m}{m+n}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{2}{n}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{x+11n}{x-11n} = \frac{2m+m+n}{2m-m-n}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$$\therefore \frac{x+11n}{x-11n} = \frac{3m+n}{m-n} \dots \dots (2)$$

বামপক্ষ = $\frac{x+11m}{x-11m} + \frac{x+11n}{x-11n}$

$$= \frac{3n+m}{n-m} + \frac{3m+n}{m-n}$$

$$= \frac{3n+m}{n-m} + \frac{3m+n}{-(n-m)}$$

$$= \frac{3n+m}{n-m} - \frac{3m+n}{n-m}$$

$$= \frac{3n+m-3m-n}{n-m}$$

$$= \frac{2n-2m}{n-m} = \frac{2(n-m)}{n-m} = 2 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{x+11m}{x-11m} + \frac{x+11n}{x-11n} = 2 \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) সমান্তর ধারাটির $(p - q)$ তম পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = $a + (n - 1)d$

∴ ধারাটির p তম পদ,

$$a + (p - 1)d = (p + q)^2 \dots \dots (1)$$

$$\text{এবং ধারাটির } q \text{ তম পদ } a + (q - 1)d = (p - q)^2 \dots \dots (2)$$

(১) নং হতে (২) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$a + (p - 1)d - a - (q - 1)d = (p + q)^2 - (p - q)^2$$

$$\text{বা, } pd - d - qd + d = 4pq$$

$$\text{বা, } d(p - q) = 4pq$$

$$\therefore d = \frac{4pq}{p-q}$$

$$\therefore \text{ধারাটির } (p - q) \text{ তম পদ} = a + \{(p - q) - 1\}d$$

$$= a + (p - 1)d - qd$$

$$= (p + q)^2 - q \times \frac{4pq}{p-q} \text{ [(i) নং হতে এবং } D \text{ এর মান বিসেয় পাই]}$$

$$= (p + q)^2 - \frac{4pq^2}{p-q}$$

নির্ণেয় পদ: $(p + q)^2 - \frac{4pq^2}{p-q}$

৬ (i) $\frac{6}{x} = p^{-1} + q^{-1}$; (ii) $6 + b + c + 162 + d$ একটি গুণোত্তর ধারা।

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৮]

(ক) $8 + 11 + 14 + 17 + \dots$ ধারার m -তম পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত ধারা: $8 + 11 + 14 + 17 + \dots$

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ $a = 8$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 11 - 8 = 3$

$\therefore$ ধারাটির n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$= 8 + (m - 1)3 = 8 + 3m - 3 = 3m + 5$

নিণেয় m তম পদ $= 3m + 5$

(খ) (ii) নং হতে b এবং d এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর: প্রদত্ত (ii) নং গুণোত্তর ধারা: $6 + b + c + 162 + d$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 6$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{b}{6} = \frac{c}{b} = \frac{162}{c} = \frac{d}{162}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 6r^3$

শর্তমতে, $6r^3 = 162$

বা, $r^3 = \frac{162}{6} = 27 = 3^3 \therefore r = 3$

এখন, $r = \frac{b}{6}$

বা, $3 = \frac{b}{6} \therefore b = 18$

আবার, $r = \frac{d}{162}$

বা, $3 = \frac{d}{162} \therefore d = 486$

নিণেয় মান: $b = 18$ এবং $d = 486$

(গ) (i) নং হতে প্রমাণ করে যে, $\frac{x+3p}{x-3p} + \frac{x+3q}{x-3q} = 2$ যেখানে $p \neq q$

উত্তর: দেওয়া আছে, $\frac{6}{x} = p^{-1} + q^{-1}$

বা, $\frac{6}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

বা, $\frac{6}{x} = \frac{p+q}{pq}$

বা, $x(p+q) = 6pq$

বা, $x = \frac{6pq}{p+q}$

বা, $x = \frac{3p-2q}{p+q}$

বা, $\frac{x}{3p} = \frac{2q}{p+q}$

বা, $\frac{x+3p}{x-3p} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+3p}{x-3p} = \frac{3q+p}{q-p}$

আবার, $x = \frac{6pq}{p+q}$

বা, $x = \frac{2p-3q}{p+q}$

বা, $\frac{x}{3q} = \frac{2p}{p+q}$

বা, $\frac{x+3q}{x-3q} = \frac{2p+p+q}{2p-p-q}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+3q}{x-3q} = \frac{3p+q}{p-q}$

বামপক্ষ $= \frac{x+3p}{x-3p} + \frac{x+3q}{x-3q} = \frac{3q+p}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{3q+p}{q-p} + \frac{3p+q}{-(q-p)} = \frac{3q+p-3p-q}{q-p} = \frac{2q-2p}{q-p} = \frac{2(q-p)}{q-p}$

$= 2 =$ ডানপক্ষ

$$\therefore \frac{x+3p}{x-3p} + \frac{x+3q}{x-3q} = 2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

৭ একটি গুণোত্তর ধারা $\frac{1}{\sqrt{2}} + p + q + r + 3\sqrt{3}$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৪]

(ক) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 =$ কত?

উত্তর: প্রদত্ত ধারা: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$

ধারাটি প্রথম 10টি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টির ধারা।

আমরা জানি, সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \frac{10(10+1)(2 \cdot 10+1)}{6}$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \frac{2310}{6} = 385$$

নির্ণয় ধারাটির সমষ্টি 385

(খ) গুণোত্তর ধারাটির p, q ও r এর মান নির্ণয় কর

উত্তর: প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা: $\frac{1}{\sqrt{3}} + p + q + r + 3\sqrt{3}$

ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$; ২য় পদ $= p$

৩য় পদ $= q$; ৪র্থ পদ $= r$; ৫ম পদ $= 3\sqrt{3}$

ধরি, ধারাটির সাধারণ অনুপাত $= c$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ ac^{n-1}

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির ৫ম পদ $= ac^{5-1}$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c^{5-1} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } c^4 = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } c^4 = (\sqrt{3})^4$$

$$\therefore c = \sqrt{3}$$

$$\text{২য় পদ, } p = ac^{2-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{2-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1$$

$$\text{৩য় পদ, } q = ac^{3-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{3-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 = \sqrt{3}$$

$$\text{৪র্থ পদ, } r = ac^{4-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{4-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3})^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{3} = 3$$

নির্ণয় মান $p = 1, q = \sqrt{3}$ এবং $r = 3$

(গ) উদ্দীপকের সমান্তর ধারাটির প্রথম 31টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: ধরি, সমান্তর ধারার ১ম পদ এবং সাধারণ অন্তর $= d$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$\text{প্রথমতে, } a + (19 - 1)d = 74$$

$$\text{বা, } a + 18d = 74 \dots (i)$$

$$\text{এবং, } a + (26 - 1)d = 102$$

$$\text{বা, } a + 25d = 102$$

$$\text{বা, } a + 18d + 7d = 102$$

$$\text{বা, } 74 + 7d = 102 \text{ [(i) নং হেতে]}$$

$$\text{বা, } 7d = 102 - 74 = 28$$

$$\text{বা, } d = \frac{28}{7} \therefore d = 4$$

d এর মান (i) নং এ বসাইয়া পাই,

$$a + 18 \times 4 = 74$$

$$\text{বা, } a + 72 = 74$$

$$\text{বা, } a = 74 - 72 \therefore a = 2$$

আবার, সমান্তর ধারার ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

$\therefore$ সমান্তর ধারাটির ১ম ৩১ টি পদের সমষ্টি

$$= \frac{31}{2} \{2 \times 2 + (31 - 1)4\}$$

$$= \frac{31}{2} \{4 + 120\} = \frac{31}{2} \times 124$$

$$= 1922$$

নির্ণয় সমান্তর ধারাটির প্রথম ৩১টি পদের সমষ্টি ১৯২২।

৮ একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a , সাধারণ অনুপাত r , ধারাটির চতুর্থ পদ -2 এবং নবম পদ $8\sqrt{2}$

(ক) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করো।

উত্তর: ধারাটির চতুর্থ পদ, $ar^{4-1} = -2$ [$\because n$ তম পদ $= ar^{n-1}$]

বা, $ar^3 = -2 \dots \dots \dots (i)$

এবং ধারাটির নবম পদ, $ar^{9-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $ar^8 = 8\sqrt{2} \dots \dots \dots (ii)$

(খ) ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় করো।

উত্তর: ধারাটির 12 তম পদ, ar^{11}

ক-হতে প্রাপ্ত সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$$

$$\text{বা, } r^5 = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } r^5 = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (-\sqrt{2})^5$$

$$\text{বা, } r = -\sqrt{2}$$

ক হতে প্রাপ্ত (i) নম্বর সমীকরণে r এর মান বিসয়ে পাই,

$$a \cdot (-\sqrt{2})^3 = -2$$

$$\text{বা, } a = \frac{-2}{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{অতএব, 12 তম পদ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^{11}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^{11}$$

$$= -(\sqrt{2})^{10} = -32$$

নির্ণেয় 12 তম পদ -32

(গ) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: ক-হতে প্রাপ্ত, প্রথম পদ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{2}$

$$\text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = ar^{2-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) = -1$$

$$\text{তৃতীয় পদ, } = ar^{3-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^2 = \frac{1 \times 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{চতুর্থ পদ} = ar^{4-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^3 = -2$$

.....

$$\text{নির্ণেয় ধারাটি, } \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - 2 + \dots \dots \dots$$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ যখন } r < 1$$

সুতরাং ধারাটির প্রথম 7 টি পদের সমষ্টি

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} (1 - (-\sqrt{2})^7)}{1 - (-\sqrt{2})} = \frac{1 + 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} \\
&= \frac{(1 + 8\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \quad [\text{লব ও হরকে } (\sqrt{2} - 1) \text{ দ্বারা গুণ করে}] \\
&= \frac{\sqrt{2} + 8 \cdot 2 - 1 - 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2 - 1)} = \frac{15 - 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{15\sqrt{2} - 7 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \quad [\text{লব ও হরকে } \sqrt{2} \text{ দ্বারা গুণ করে}] \\
&= \frac{1}{2}(15\sqrt{2} - 14) \\
&\therefore 7 \text{ টি পদের সমষ্টি } \frac{1}{2}(15\sqrt{2} - 14)
\end{aligned}$$

৯ কোন ধারার n তম পদ $2n - 4$.

(ক) ধারাটি নির্ণয় করো।

উত্তর: দেওয়া আছে, ধারাটির n তম পদ $2n - 4$

$\therefore n = 1, 2, 3, \dots$ বসিয়ে পাই,

১ম পদ $2 \cdot 1 - 4 = -2$

২য় পদ $2 \cdot 2 - 4 = 0$

৩য় পদ $2 \cdot 3 - 4 = 2$

৪র্থ পদ $2 \cdot 4 - 4 = 4$

.....

নির্ণেয় ধারা: $-2 + 0 + 2 + 4 + \dots$

(খ) ধারাটির 10-তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: দেওয়া আছে, n তম পদ $= 2n - 4$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= 2 \cdot 10 - 4 = 16$

ক-হতে প্রাপ্ত ধারাটির, প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর, $d = 0 - (-2) = 2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

সুতরাং ধারাটির 20টি পদের সমষ্টি,

$$S_{20} = \frac{20}{2} \{2(-2) + (20 - 1)(2)\}$$

$$= 10 \{-4 + 19 \times 2\}$$

$$= 10 \{-4 + 38\} = 10 \times 34 = 340$$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ 16 এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি 340।

(গ) প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: ক-হতে প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর $d = 0 - (-2) = 2$

প্রাপ্ত ধারার প্রথম পদকে প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত $[r = 2]$ ধরে যে গুণোত্তর ধারা পাওয়া যাবে তার পদগুলো নিম্নরূপ:

$$\therefore \text{গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ: } ar^{1-1} = (-2)2^0 = -2$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ, } ar^{2-1} = -2 \times 2 = -4$$

$$\text{তৃতীয় পদ, } ar^{3-1} = -2 \times 2^2 = -8$$

$$\text{চতুর্থ পদ, } ar^{4-1} = -2 \times 2^3 = -16$$

.....

নির্ণেয় ধারা: $-2 - 4 - 8 - 16 \dots n$ পর্যন্ত।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; \text{ যখন } r > 1$$

∴ ধারাটির প্রথম ৪টি পদের সমষ্টি, $S_8 = \frac{-2(2^8-1)}{2-1}$
 $= -2(256 - 1) = -2 \times 255 = -510$
 নির্ণেয় ধারাটির প্রথম ৪টি পদের সমষ্টি = 510।

So ২০। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম $(m + n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

(সমাধান) কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম $(m + n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

উত্তর: মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a
 এবং সাধারণ অন্তর = d

∴ ধারাটির প্রথম m পদের সমষ্টি = $\frac{m}{2}\{2a + (m - 1)d\}$
 বা, $n = \frac{m}{2}\{2a + (m - 1)d\}$
 বা, $2a + (m - 1)d = \frac{2n}{m}$ (1)

আবার, প্রথম n পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$
 বা, $m = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$
 বা, $2a + (n - 1)d = \frac{2m}{n}$ (2)

সমীকরণ (1) নং হতে (2) নং বিয়োগ করে পাই,
 $2a + (m - 1)d - 2a - (n - 1)d = \frac{2n}{m} - \frac{2m}{n}$
 বা, $(m - 1 - n + 1)d = \frac{2n^2 - 2m^2}{mn}$
 বা, $(m - n)d = \frac{2(n^2 - m^2)}{mn} = \frac{2(n - m)(n + m)}{mn}$
 বা, $d = \frac{-2(m - n)(n + m)}{(m - n) \cdot mn} = -2 \cdot \frac{n + m}{mn}$

তাহলে, প্রথম $(m + n)$ পদের সমষ্টি
 $= \frac{m+n}{2}\{2a + (m + n - 1)d\} = \frac{m+n}{2}\{2a + (m - 1)d + nd\}$
 $= \frac{m+n}{2} \left\{ \frac{2n}{m} + n \cdot \left(\frac{-2(m+n)}{mn} \right) \right\}$ [(1)নং থেকে এবং d এর মান বসিয়ে]
 $= \frac{m+n}{2} \left\{ \frac{2n}{m} - \frac{2(m+n)}{m} \right\}$
 $= \frac{m+n}{2} \cdot \left(\frac{2n - 2m - 2n}{m} \right)$
 $= \frac{m+n}{2} \cdot \left(\frac{-2m}{m} \right) = -(m + n)$

∴ ধারাটির $(m + n)$ পদের সমষ্টি = $-(m + n)$.

১১১ কোনো সমান্তর ধারার p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে, $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$

(সমাধান) দেখাও যে, $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$

উত্তর: মনে করি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ = x

এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ ধারাটির p তম পদ = $x + (p - 1)d = a$ (1)

q তম পদ = $x + (q - 1)d = b$ (2)

r তম পদ = $x + (r - 1)d = c$ (3)

(1) নং সমীকরণ হতে (2) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$x + (p - 1)d - x - (q - 1)d = a - b$$

$$\text{বা, } d(p - 1 - q + 1) = a - b$$

$$\text{বা, } d(p - q) = a - b$$

$$\text{বা, } d = \frac{a-b}{p-q} \text{(4)}$$

আবার (2) নং সমীকরণ হতে (3) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$x + (q - 1)d - x - (r - 1)d = b - c$$

$$\text{বা, } (q - 1 - r + 1)d = b - c$$

$$\text{বা, } (q - r)d = b - c$$

$$\text{বা, } d = \frac{b-c}{q-r} \text{(5)}$$

এখন, (4) ও (5) হতে পাই,

$$\frac{a-b}{p-q} = \frac{b-c}{q-r}$$

$$\text{বা, } (a - b)(q - r) = (b - c)(p - q)$$

$$\text{বা, } a(q - r) - b(q - r) = b(p - q) - c(p - q)$$

$$\text{বা, } a(q - r) + c(p - q) - b(q - r) - b(p - q) = 0$$